// Известия вузов. Математика. 1957. №1. С.9-19.

УДК 514.75

СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЯ, ИМЕЮЩЕГО ОДНОМЕРНОЕ И ДВУМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВОЙНЫХ ЛИНИЙ

С.В.Киреева

(Московский автодорожный институт)

В работе исследуется отображение областей в проективно пространстве P_3 , которое переводит проективно-чебышевску сеть Σ_3 в проективно-чебышевскую $\overline{\Sigma}_3$.

1. В проективном пространстве P_3 задан диффеоморфизм $(\Omega \subset P_3) \to (\overline{\Omega} \subset P_3)$, который переводит точку $A \in \Omega$ в точку B Области $\Omega, \overline{\Omega}$ нормализованы в смысле А.П.Нордена одним и же семейством плоскостей: $A \to \Pi_2(A), B \to \Pi_2(A), B \in \Pi_2(A)$. Данные нормализации определяют в областях $\Omega, \overline{\Omega}$ аффинные связнос $\nabla, \overline{\nabla}$. Отображение f переводит сеть $\Sigma_3 \subset \Omega$ в сеть $\overline{\Sigma}_3 \subset$ К областям $\Omega, \overline{\Omega}$ присоединены реперы $R^A = \{A, A_i\}$, $R^B = \{B, B$ где A_i, B_i ($i = 1,2,3$) - нормальные точки касательных к ли ниям $\omega^i, \overline{\omega}_i$ сетей $\Sigma_3, \overline{\Sigma}_3$. Точки B, B_i в репере R^A имеют дующие представления:

$$\vec{B} = \vec{A} + \gamma^i \vec{A}_i, \quad \vec{B}_i = \gamma_i^i \vec{A}_i \quad (\gamma_1^1 = \gamma_2^2 \neq 1,\ \gamma_3^3 \neq \gamma_1^1,\ \gamma_3^3 \neq 1).$$

В области Ω существует одномерное Δ_1 и двумерное Δ_2 распределения такие, что любая линия ℓ этих распределени двойная [1], причем касательные к линиям ℓ и $\overline{\ell} = f(\ell)$ перес ются в точках нормализующей плоскости $\Pi_2(A) = (A_1 A_2 A_3)$. Образ $\overline{\Delta}_2$ распределений в индуцированном отображении f_{*A} опреде ются следующим образом:

$\overline{\Delta}_1(B) = (BB_3)$, $\overline{\Delta}_2(B) = (BB_1B_2)$.

Итак: $\Delta_1(A) = (AA_3)$, $\overline{\Delta}_1(B) = (BA_3)$,

$\Delta_2(A) = (AA_1A_2)$, $\overline{\Delta}_2(B) = (BA_1A_2)$.

рмулы перехода от репера R^A к реперу R^B имеют вид

$$\overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 + \gamma^k \omega_k^0, \quad \overline{\omega}_i^i = \omega_i^i + \gamma_{ii}^i \omega^i / \gamma_i^i + \gamma^k \omega_k^0,$$
$$\overline{\omega}_i^0 = \gamma_i^i \omega_i^0, \quad \overline{\omega}_i^j = \gamma_i^i (\omega_i^j - \gamma^j \omega_i^0)/\gamma_j^j \quad (i,j,k = 1,2,3,\ i \neq j). \tag{I}$$

Напомним, что $\gamma_1^1 = \gamma_2^2 \neq \gamma_3^3$; $\gamma_1^1 \neq 1, \gamma_3^3 \neq 1$, а функции γ_{ii}^i получены и дифференцировании абсолютных инвариантов γ_i^i , причем $= -\gamma_i^i \gamma^i a_{ii}^0$, если $i = 1,2$.

2. Из формул (1) следует, что проективно-чебышевская сеть Σ_3 :

$$\omega_i^0 = a_{ii}^0 \omega^i, \quad \omega_i^j = a_{ii}^j \omega^i \tag{2}$$

егда переходит в проективно-чебышевскую сеть $\overline{\Sigma}_3$. Здесь и же будем предполагать, что в области Ω существует проектив- -чебышевская сеть Σ_3 . Известно, что для таких сетей псев- фокусы $F_i^j (i \neq j)$ совпадают с гармоническим полюсом F_i и с нор- льной точкой A_i направления (AA_i) . Это приводит к тому, о плоскость $\Pi_2(A)$ - гармоническая, а области Ω и $\overline{\Omega}$ норма- зованы семейством гармонических плоскостей; ранг нормализа- и $A \to \Pi_2(A)$ $(B \to \Pi_2(A))$ совпадает с индексом сети $\Sigma_3 (\overline{\Sigma}_3)$.

3. При отображении f на прямой существуют две инвариант- е точки $N_1^1 = N_2^2$ и N_3^3 , где $\vec{N}_i^i = -\gamma_i^i \vec{A} + \vec{B}$; под точкой C бу- м понимать точку пересечения прямой (AB) и гармонической оскости $\Pi_2(A)$: $\vec{C} = \gamma^i \vec{A}_i$. Разложения их дифференциалов сле- ющие:

$$d\vec{N}_1^1 = \theta_1^1 \vec{N}_1^1 + \omega^3 (\gamma_3^3 - \gamma_1^1) \vec{A}_3, \quad d\vec{C} = \varphi \vec{C} + \omega^i (a_{ii}^0 \gamma^i \vec{A} + (\gamma_i^i - 1)\vec{A}_i),$$
$$d\vec{N}_3^3 = \theta_3^3 \vec{N}_3^3 + \omega^1 (\gamma_1^1 - \gamma_3^3) \vec{A}_1 + \omega^2 (\gamma_1^1 - \gamma_3^3) \vec{A}_2 + \omega^3 \frac{\gamma_3^3 \gamma^3 a_{33}^0 + \gamma_{33}^3}{1 - \gamma_3^3} \vec{C}. \tag{3}$$

формул (3) следует, что при любом смещении точки A инва- антная точка $N_1^1 = N_2^2$ описывает одномерное многообразие, при- м при смещении A в любом направлении, принадлежащем плос- сти распределения $\Delta_2(A)$, точка N_1^1 неподвижна. Размерность огообразий (N_3^3) , (C) в общем случае равна трем.

При отображении f , переводящем проективно-чебышевскую ть Σ_3 в проективно-чебышевскую $\overline{\Sigma}_3$, компоненты $\overline{R}_{ij}$ тензора Риччи связности $\overline{\nabla}$ линейно выражаются через компоненты R_{ij} тензора Риччи связности ∇ :

$$\overline{R}_{ii} = R_{ii}\gamma^i_i \quad (\overline{R}_{ij} = R_{ij} = 0 \qquad \text{при} \quad i \neq j).$$

4. Рассмотрим случай, когда образ точки A в отображении f принадлежит площадке $\Delta_2(A)$ распределения Δ_2 :

$$B \in (AA_1A_2) \Rightarrow \gamma^3 = 0 \qquad (\gamma^1 \text{ или } \gamma^2 \text{ не равно нулю}).$$

Из разложений $d\gamma^i$

$$d\gamma^i - \gamma^i(\gamma^k\omega^0_k + \omega^0_0) + \gamma^j\omega^i_j + \omega^i = \gamma^i_i\,\omega^i \tag{4}$$

с учетом (2) при $\gamma^3 = 0$ имеем:

$$\omega^3 + \gamma^1 a^3_{11}\,\omega^1 + \gamma^2 a^3_{22}\,\omega^2 = \gamma^3_3\,\omega^3.$$

Последнее равенство возможно в следующих случаях:

$$1)\begin{cases}\gamma^1 = 0,\\ a^3_{22} = 0,\\ \gamma^3_3 = 1,\end{cases} \qquad 2)\begin{cases}\gamma^2 = 0,\\ a^3_{11} = 0,\\ \gamma^3_3 = 1,\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}a^3_{22} = 0,\\ a^3_{11} = 0,\\ \gamma^3_3 = 1.\end{cases}$$

Все эти три случая сети $\Sigma^i_3\ (i = 1,2,3)$ приводят к совпадению точки N^3_3 с точкой C пересечения прямой (AB) и гармонической плоскости $\Pi_2(A)$, что мы в начале данной работы исключили из рассмотрения. Если же этот запрет снять, то в первом и во втором случаях приходим к перспективному отображению f с центром перспективы в неподвижной точке C ; в третьем случае все формы ω^0_t, ω^3_t $(t = 1,2)$ обращаются в нуль, гармонические плоскости образуют пучок с осью $(A_1A_2) = \Delta_2(A) \cap \Pi_2(A)$, индекс сети $\Sigma_3 = \Sigma^1_3$ равен единице и плоскость $\Delta_2(A)$ распределения Δ_2 имеет особое направление для сети Σ^1_3 .

5. Пусть теперь точка $B = f(A) \in \Delta_1(A) = (AA_3)$. Это возможно, если $\gamma^1 = \gamma^2 = 0, \gamma^3 \neq 0$. Из формул (4) следует:

$$\gamma^1_1 = \gamma^2_2 = 1,\ a^1_{33} = a^2_{33} = a^0_{33} = 0 \Rightarrow N^1_1 = C = A_3;\ \ d\vec{A}_3 = \omega^3_3\vec{A}_3.$$

Опять приходим к перспективному отображению, но теперь с центром перспективы в точке $C = A_3$. Множество гармонических плоскостей $\Pi_2(A)$ образует связку с центром в точке A_3 , индекс сети $\Sigma_3 = \Sigma^2_3$ равен двум, направление (AA_3) - особое для сети Σ^2_3 , прямая $(AB) = (AA_3)$ - образующая конуса Риччи. Но и в рассматриваемом случае: $B \in (AA_3)$ - нарушается требование $N^1_1 \neq C$, поэтому далее в работе будем предполагать, что ни один из относительных инвариантов γ^i не равен нулю.

6. Потребуем, чтобы двойное направление (AA_3) было характеристическим. Уравнения характеристических линий для отображения f следующие:

$$h^i_{jj}(\omega^j)^2 = \lambda\,\omega^i,$$

где

$$h^i_{jj} = -\gamma^i a^0_{jj} \quad (i \neq 3, j \neq 3), \qquad h^3_{33} = \gamma^3_{33}/\gamma^3_3,$$

$$h^t_{33} = \frac{\gamma^3_3 - \gamma^1_1}{\gamma^1_1}\,a^t_{33} - \frac{\gamma^3_3}{\gamma^1_1}\,\gamma^t a^0_{33}, \quad h^3_{tt} = \frac{\gamma^1_1 - \gamma^3_3}{\gamma^3_3}\,a^3_{tt} - \frac{\gamma^1_1}{\gamma^3_3}\,\gamma^3 a^0_{tt} \quad (t \neq 3).$$

Направление (AA_3) будет характеристическим, если $h^t_{33} = 0\ (t \neq 3)$. Это возможно в двух случаях.

1) Пусть $a^0_{33} = 0$, тогда $a^t_{33} = 0$, и, следовательно, характеристическая линия ω^3 - прямая, причем $\dim(A_3) = 2$, т.к. при смещении точки A в направлении (AA_3) точка A_3 - неподвижна. Отметим, что в этом случае конус Риччи содержит прямую (AA_3) в качестве образующей.

2) Пусть прямая (AA_3) не принадлежит конусу Риччи: $a^0_{33} \neq 0$. Найдем дифференциал точки A_3 при смещении точки A вдоль линии ω^3: $d_3\vec{A}_3 = \psi^3_3\vec{A}_3 + \omega^3 a^0_{33}/(\gamma^3_3 - \gamma^1_1)\,\vec{A}_{33}$, где $\vec{A}_{33} = -\gamma^1_1\vec{A} + \gamma^3_3\vec{B}$. Сложное отношение $(AB, N^1_1A_{33}) = 1/\gamma^3_3$.

Итак, если двойная линия ω^3 является характеристической, касательная (AA_3) к которой не лежит на конусе Риччи, то (ABA_3) - соприкасающаяся плоскость линии ω^3 , причем $(AB, N^1_1A_{33}) = \frac{1}{\gamma^3_3}$. Обратное утверждение тоже справедливо. Подчеркнем, что линия ω^3 в рассматриваемой ситуации - плоская.

7. Потребуем, чтобы теперь любое двойное направление плоскости $\Delta_2(A)=(AA_1A_2)$ распределения Δ_2 было характеристическим (ω^3 - не характеристическая линия). Это приводит к следующим соотношениям:

$$h^1_{11}=h^2_{22}=h^2_{11}=h^3_{11}=h^1_{22}=h^3_{22}=0.$$

Уравнения характеристических принимают вид: $h^i_{33}(\omega^3)^2=\lambda\omega^3$, откуда следует, что, кроме характеристических направлений на плоскости $\Delta_2(A)$, существует еще одно характеристическое направление (AS), где $\vec{s}=h^i_{33}\vec{A}_i$. Обозначим через S_{12} точку пересечения прямых (A_3S) и (A_1A_2), а через C_{12} - точку пересечения прямых (A_3C) и (A_1A_2). Направление (AS) будет принадлежать плоскости (ABA_3) тогда и только тогда, когда сложное отношение $(A_1A_2,C_{12}S_{12})$ равно единице:

$$(A_1A_2,C_{12}S_{12})=\frac{(\gamma^3_3-\gamma^1_1)\gamma^2a^1_{33}-\gamma^3_3\gamma^1\gamma^2a^0_{33}}{(\gamma^3_3-\gamma^1_1)\gamma^1a^2_{33}-\gamma^3_3\gamma^1\gamma^2a^0_{33}}=1.$$

Последнее возможно, если $\mu=\gamma^2a^1_{33}-\gamma^1a^2_{33}=0$. Можно показать, что μ - относительный инвариант. Геометрический смысл обращения его в нуль следующий: если любое двойное направление плоскости $\Delta_2(A)$-характеристическое, то относительный инвариант μ равен нулю тогда и только тогда, когда характеристическое направление (AS) принадлежит плоскости, содержащей прямые (AB) и $\Delta_1(A)$. Если потребовать, чтобы все двойные направления распределений Δ_1 и Δ_2 были бы характеристическими, то получим, что указанные направления должны быть не просто характеристическими, но и каждое из них должно быть f-главным.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. Многомерные сети двойных линий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1975. Вып.6. С.19-25.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ОРИЦИКЛОВ С ТРЕХКРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В.С.М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном пространстве Лобачевского $\mathcal{Л}_3$ в интерпретации Кэли-Клейна исследуется подкласс $\mathcal{L}'_0$ конгруэнций орициклов с трехкратной фокальной поверхностью. Доказана теорема существования и получены геометрические свойства ассоциированных с $\mathcal{L}'_0$ прямолинейных конгруэнций и поверхностей трехмерного проективного пространства, содержащего абсолют Q_0.

Трехмерное пространство Лобачевского $\mathcal{Л}_3$ в интерпретации Кэли-Клейна образовано внутренними точками невырожденной действительной нелинейчатой квадрики Q_0, называемой абсолютом, причем точки абсолюта являются несобственными точками пространства $\mathcal{Л}_3$. Орицикл C пространства $\mathcal{Л}_3$ интерпретируется нераспадающейся действительной кривой второго порядка, расположенной внутри абсолюта, касающейся абсолюта в одной из его точек A_0 так, что полюс A_M касательной к орициклу C в любой точке $M\in C$ относительно сечения Γ абсолюта Q_0 плоскостью орицикла C лежит на прямой A_MM.

Рассмотрим двупараметрическое семейство (конгруэнцию) $\mathcal{L}$ орициклов. Отнесем конгруэнцию $\mathcal{L}$ к реперу $\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta=0,1,2,3)$, где A_3 - произвольная точка сечения Γ, A_1 и A_2 полярно сопряжены между собой и с точками A_0 и A_3 относительно абсолюта Q_0, причем точка A_1 лежит в плоскости C. При надлежащей нормировке вершин репера уравнения абсолюта Q_0 и орицикла C примут соответственно вид [1, с.48]:

$$(x^1)^2+(x^2)^2-2x^0x^3=0, \tag{1}$$

$$(x^1)^2-2x^0x^3+2(x^3)^2=0, \quad x^2=0. \tag{2}$$

Действительно, поверхность (I) является невырожденной нелинейчатой квадрикой с вещественными точками. Коника (2) также